

TALLER

1. Sean a , b y k números reales positivos, con $a \neq 1$ y $k \neq 1$.

Demuestre que

$$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}.$$

¿Por qué es necesario que $a \neq 1$ y $k \neq 1$? ¿Puede tomar b el valor de 1? Justifique su respuesta.

2. Encuentre todos los valores reales de x que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones.

Verifique que las soluciones cumplan las condiciones de existencia de los logaritmos.

a. $\log_{\sqrt{x}} 16 = 2$

b. $\log_x 25 = 2$

c. $\log_{x+1} 16 = 2$

d. $\log_2(x-1) = 3$

e. $\log_3(x^2) = 4$

f. $\log_{\sqrt{x}} 81 = 4$

3. Empleando logaritmos, encuentre el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

Expresa la solución mediante logaritmos y calcule una aproximación con dos cifras decimales.

a. $2 \cdot 4^x + 14 = 50$

b. $3^{3x+1} = 50$

c. $5^{2x-1} = 18$

d. $4^{x+2} = 75$

e. $7^{2x+1} - 5 = 30$

f. $3 \cdot 2^{4x-1} + 6 = 25$

4. Una población bacteriana cuenta inicialmente con 20 colonias. Si al cabo de cada hora la población se incrementa en un 13 %, determine:

a) La función $P(t)$ que representa el número de colonias después de t horas.

b) El número aproximado de colonias después de 36 horas.

5. Una población bacteriana cuenta inicialmente con 50 000 bacterias. Después de aplicar un antibiótico, la población se reduce en un 15 % cada hora.

a) Construya una función $P(t)$ que represente la población bacteriana después de t horas de tratamiento.

b) ¿Después de cuántas horas completas la población será menor que 100 bacterias?

6. Santiago desarrolla una infección bacteriana cuya población inicial es de 30 bacterias y se incrementa en un 16 % cada hora.

Para este modelo hipotético, se considera que Santiago presenta fiebre cuando la población bacteriana supera las 15000 bacterias.

- a) ¿Después de cuántas horas completas Santiago presentará fiebre por primera vez?
- b) Santiago es llevado al hospital. Seis horas después de la primera hora completa en la que presenta fiebre, le aplican un antibiótico que comienza a reducir la población bacteriana en un 20 % cada hora.
¿Cuántas horas han transcurrido desde el inicio de la infección hasta la aplicación del antibiótico?
- c) Si Santiago deja de presentar fiebre cuando la población bacteriana es menor o igual que 15 000, ¿después de cuántas horas completas de tratamiento dejará de presentar fiebre?
- d) ¿Después de cuántas horas completas de tratamiento la población bacteriana será menor que 30?

7. La función

$$a(t) = \frac{100(1.16)^t}{1 + 0.5(1.16)^t} \quad \text{para } 1 \leq t \leq 18,$$

representa la estatura hipotética de un niño, en centímetros, a la edad de t años.

- a) Escriba la función $a(t)$ utilizando los valores de A , B y C que le correspondieron.
- b) Calcule $a(t)$ para las edades

$$t = 1, 2, 3, \dots, 18.$$

Organice los resultados en una tabla con dos columnas: **edad (años)** y **estatura (cm)**.

Redondee las estaturas a una cifra decimal y conserve los valores sin redondear para los cálculos posteriores.

- c) En una hoja cuadriculada, dibuje un plano cartesiano utilizando las siguientes escalas:
 - **Eje horizontal:** dos cuadritos representan un año. Marque las edades de 0 a 18.
 - **Eje vertical:** dos cuadritos representan diez centímetros. Marque las estaturas de 0 a 200 cm.

Si los valores obtenidos no caben en la escala propuesta, ajuste la escala vertical e indique claramente el cambio.

Identifique los ejes como **edad (años)** y **estatura (cm)**.

- d) Ubique los 18 puntos $(t, a(t))$ y trace una curva suave que siga su trayectoria entre $t = 1$ y $t = 18$.

Preguntas

- a) Según el modelo, ¿cuánto mide el niño a los 3, 9 y 15 años?
- b) ¿Cuántos centímetros crece entre el primer año y los 18 años?
- c) ¿Cuánto crece entre los 5 y los 10 años? ¿Y entre los 10 y los 15 años?
Compare los resultados e indique en cuál de estos dos intervalos crece más.
- d) Construya una nueva tabla con dos columnas: **intervalo de edad (años)** e **incremento de estatura (cm)**.
Calcule

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t), \quad t = 1, 2, \dots, 17.$$

- ¿Entre qué dos edades consecutivas se presenta el mayor crecimiento? ¿De cuántos centímetros es ese incremento?
- e) ¿La estatura aumenta siempre en el intervalo estudiado? ¿Aumenta cada año la misma cantidad?
- f) Utilizando la gráfica, estime la edad a la que el niño alcanza los 140 cm.
Indique entre qué dos edades enteras se encuentra su estimación.
Si el modelo no alcanza esa estatura en el intervalo estudiado, explique cómo llegó a esa conclusión.
- g) ¿Cuál es el porcentaje de aumento de la estatura entre el primer año y los 18 años?
Tome como referencia la estatura al año de edad.
- h) ¿Considera que este modelo representa adecuadamente el crecimiento de todos los niños? Explique qué aspectos de la realidad no se tienen en cuenta.
8. Los siguientes datos representan la concentración de una sustancia en sangre, medida en mg/L , durante las primeras dos horas de observación.
Cada pareja (t, C) representa el tiempo transcurrido, en horas, y la concentración de la sustancia, en mg/L .

$$(0, 10), \quad (1, 9.8), \quad (2, 10.1).$$

- a) Determine la ecuación de la recta de ajuste mediante regresión lineal.
Escriba el modelo obtenido en la forma

$$C(t) = mt + b.$$

- b) Utilizando el modelo obtenido, estime la concentración de la sustancia después a las tres horas.