

TALLER

1. Considere los siguientes vectores:

$$A = (1, -1, 2), \quad B = (-2, 2, 1), \quad C = (1, -2, -1).$$

Realice las siguientes operaciones:

- a. $A + B + C$
- b. $A - 2B + 3C$
- c. $A + 2(B - C)$
- d. $A \cdot (B - 2C)$
- e. $2A + \|B\|C$
- f. $\|A\|\|B\|\|C\|$
- g. $\|A\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2$

2. Considere el vector de datos

$$A = (1, -3, 4, 1, 3, -2, 1, -4).$$

- a. Encuentre $\bar{A}$ y D_A .
- b. Encuentre $\bar{A} \cdot D_A$.
- c. Encuentre $\|A\|$ y $\|D_A\|$.

Para los ejercicios 3-5, utilice el coeficiente de correlación de Pearson definido por

$$i_{AB} = \frac{D_A \cdot D_B}{\|D_A\|\|D_B\|},$$

donde D_A y D_B son los vectores de desviaciones respecto de sus respectivas medias.

3. Considere los siguientes vectores de datos:

$$A = (2.0, 4.2, 5.7, 8.2, 9) \quad \text{y} \quad B = (1.5, 3, 5, 8.5, 11).$$

Calcule el coeficiente de correlación de Pearson i_{AB} e interprete su valor a partir del comportamiento de los datos.

4. Considere los siguientes vectores de datos:

$$A = (2.0, 4.2, 5.7, 8.2, 9) \quad \text{y} \quad B = (9.5, 5.2, 1.2, -3, -10).$$

Calcule el coeficiente de correlación de Pearson i_{AB} e interprete su valor a partir del comportamiento de los datos.

5. Considere los siguientes vectores de datos:

$$A = (2.0, 4.2, 5.7, 8.2, 9) \quad \text{y} \quad B = (2, -4, 5, -6, 8).$$

Calcule el coeficiente de correlación de Pearson i_{AB} e interprete su valor a partir del comportamiento de los datos.

6. Considere las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Antes de realizar cada operación, indique si está definida y, en caso afirmativo, determine las dimensiones de la matriz resultante.

- a. $M + N$
- b. $2M - 3N$
- c. $M + P$
- d. MP
- e. PM
- f. MQ
- g. QM
- h. RM
- i. PR
- j. $MP + R$

A continuación, realice las siguientes operaciones y compare los resultados:

- k. Calcule MP y PM .
- l. Calcule $R(MP)$ y $(RM)P$.
- m. Calcule $M(Q + I_3)$ y $MQ + M$, donde

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Para cada una de las siguientes matrices, determine primero si es invertible. En caso afirmativo, calcule su matriz inversa.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$ b. $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$

c. $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$ d. $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

En cada caso, justifique su respuesta a partir del determinante.

8. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Calcule $\det(A)$.
- b. Encuentre A^{-1} .
- c. Calcule AA^{-1} .
- d. Calcule $A^{-1}A$.
- e. Compare los resultados de los literales c. y d. con la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando matrices. Para ello:

- a) escriba el sistema en la forma

$$AX = B,$$

- b) calcule A^{-1} , si existe,

c) utilice

$$X = A^{-1}B$$

para encontrar la solución.

$$\text{a.} \quad \begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = 2, \end{cases} \quad \text{b.} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ x + y = 5, \end{cases} \quad \text{c.} \quad \begin{cases} 4x + y = 9, \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$$

10. Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

- Escriba el sistema en la forma $AX = B$.
- Calcule $\det(A)$.
- ¿Existe A^{-1} ?
- Encuentre al menos cuatro soluciones de este sistema de ecuaciones.
- Explique por qué el sistema tiene infinitas soluciones.

11. Para cada una de las siguientes matrices, encuentre sus valores propios y un vector propio asociado a cada uno de ellos.

$$\text{a.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b.} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\text{c.} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d.} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En cada caso, verifique directamente que el vector propio v obtenido satisface

$$Mv = \lambda v,$$

donde M representa la matriz correspondiente y λ el valor propio asociado.

12. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre los valores propios de A .
- Encuentre un vector propio asociado a cada valor propio.
- Normalice los vectores propios obtenidos.
- Interprete geométricamente qué ocurre cuando la matriz A actúa sobre cada uno de sus vectores propios.

13. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre sus valores propios.
- Determine todos los vectores propios asociados.
- ¿Existen dos vectores propios linealmente independientes?
- A partir de la respuesta anterior, indique si la matriz puede diagonalizarse.

14. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a. Calcule el polinomio característico de A .
- b. Encuentre sus valores propios.
- c. Encuentre un vector propio asociado a cada valor propio.
- d. Construya una matriz P cuyas columnas sean vectores propios de A .
- e. Construya la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- f. Verifique que

$$A = PDP^{-1}.$$

15. Una población se divide en dos clases de edad: individuos jóvenes J_n y adultos A_n . Su evolución anual está descrita por el modelo de Leslie

$$X_{n+1} = LX_n,$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Aquí J_n representa el número de individuos jóvenes y A_n el número de adultos en el año n . Inicialmente,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

- a. Calcule X_1 , X_2 , X_3 y X_4 .
- b. Para cada uno de estos años, calcule la razón

$$\frac{J_n}{A_n}.$$

¿Hacia qué valor parece aproximarse?

- c. Encuentre los valores propios de la matriz L .
- d. Determine un vector propio asociado al valor propio de mayor valor absoluto.
- e. Normalice este vector propio de manera que la suma de sus componentes sea igual a 1. Interprete las componentes obtenidas como las proporciones límite de jóvenes y adultos en la población.
- f. Determine el factor por el cual tiende a multiplicarse la población total de un año al siguiente.
- g. Explique qué ocurre con la distribución de la población entre jóvenes y adultos cuando n aumenta.